ベイズ型再構成法

- 画像の有する滑らかさなどの**事前情報（prior）**を統計的方法に組み込む
- 事前情報はベイズの定理に基づく

$$\underbrace{P(\lambda|y)}_{\text{事後分布}} = \frac{P(y|\lambda)\overbrace{P(\lambda)}^{\text{事前分布}}}{P(y)} \propto P(y|\lambda)P(\lambda) = \underbrace{L(\lambda)}_{\text{尤度}}P(\lambda)$$

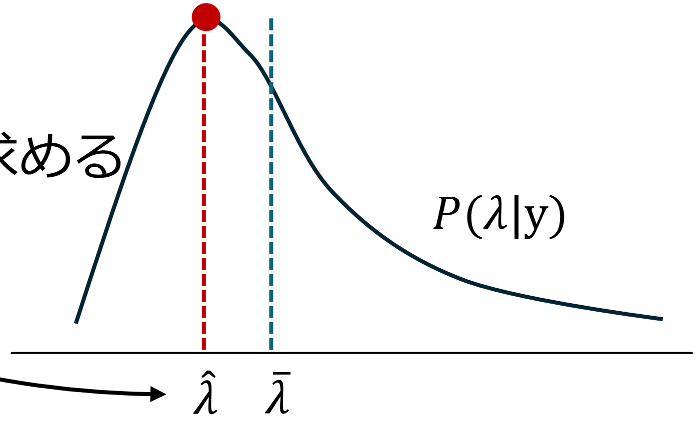
y：投影データ
λ：画像（放射能分布）

▼ 対数をとる

$$\boxed{\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}}[\ln L(\lambda) + \ln P(\lambda)]}$$

⬅ MAP推定の目的関数

事前分布$P(\lambda)$を上式に与え、そのときの事後分布$P(\lambda|y)$の最大値$\hat{\lambda}$を求める
→ Maximum a posteriori (MAP)

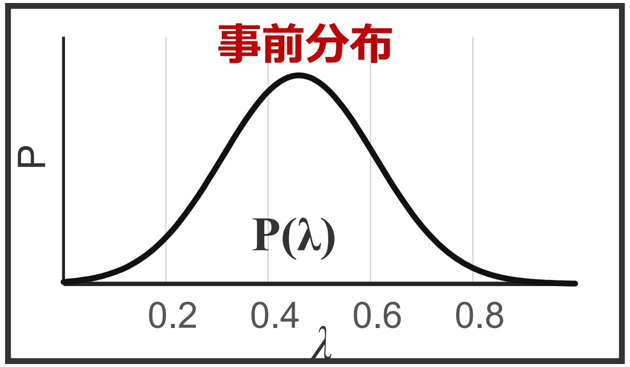


事前情報 (Prior) とは

ベイズ的に考える：事前情報を投影データで更新する

$$\underbrace{P(\lambda|y)}_{\text{事後分布}} \propto \underbrace{P(y|\lambda)}_{\text{尤度}}\underbrace{P(\lambda)}_{\text{事前分布}} = \underbrace{L(\lambda)}_{\text{尤度}}\underbrace{P(\lambda)}_{\text{事前分布}}$$

投影データを見る前の仮定
＝ 事前情報



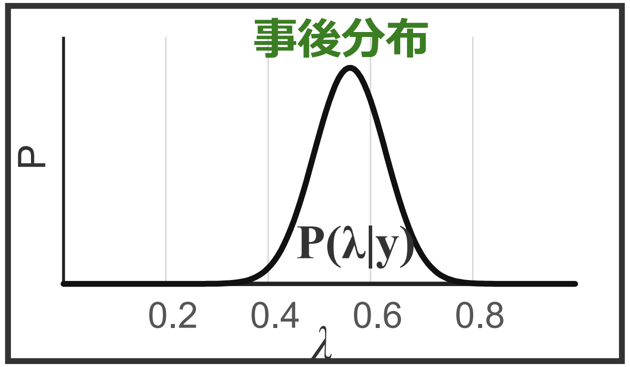
画像λに対する仮定
例：滑らかさ・エッジ保持

投影データ y を反映して
事後分布を求める

L(λ) = P(y|λ)
y：投影データ
画像 λ から
y が観測される
尤もらしさ

投影データへの適合度

投影データで更新された分布



事後分布が最大となる
画像 $\hat{\lambda}$を推定

MAP推定：事前分布 ***P(λ)*** と尤度 ***L(λ)*** から，事後分布 ***P(λ|y)*** が最大となる画像 $\hat{\lambda}$を求める

正則化項Rの代表例

■ Gibbs事前分布

$$P(\lambda)=\frac{1}{Z(\beta)}exp\{-\beta R(\lambda)\}$$

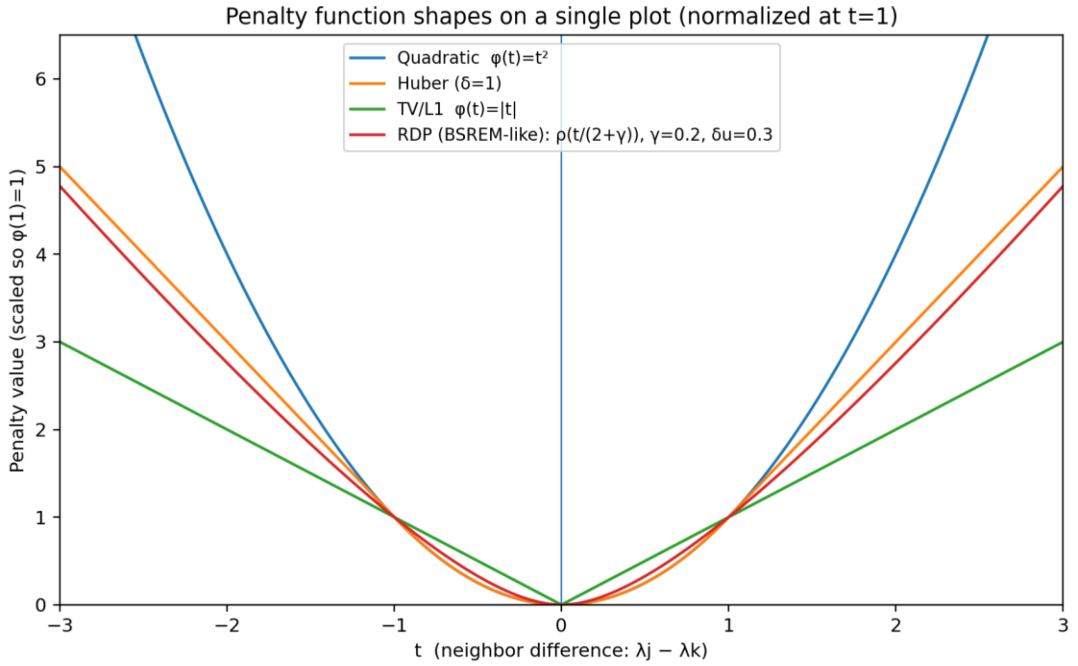
事前分布：滑らかで、構造を保持する画像を高く評価する
正則化：滑らかでない画像に罰則を与える

$$R(\lambda)=\sum_{j}\sum_{k\in\mathcal{N}_{(j)}} w_{jk}\phi(\lambda_j-\lambda_k)$$

N(j)　：近傍ボクセル
w_{jk}　：距離・方向に応じた重み
ϕ(·)　：ペナルティ形状

■ 代表的なペナルティ関数

- ✓ Quadratic(二次関数)：強い平滑化
- ✓ Huber：エッジ保存
- ✓ Total variation　：エッジ保存
- ✓ Relative difference　：ノイズ抑制とエッジ保存

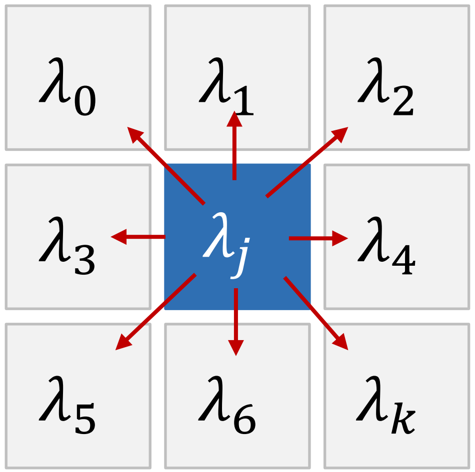


RDPでは集積によって正則化強度が異なる

■ RDP

$$R(\lambda) = \sum_{j} \sum_{k \in N_j} w_{jk} \sqrt{\beta_j \beta_k} \boxed{\frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k + \gamma |\lambda_j - \lambda_k|}}$$

β_j, β_k：画素ごとの正則化重み



✓ 低集積は 同じ Δでも正則化が大きい
→ **平滑化されやすい**

✓ Δ が大きくなると |Δ|/γ（一次関数）に近づく
→ **エッジ保存されやすい**

*$S = \lambda_j + \lambda_k$, $\Delta = \lambda_j - \lambda_k$とする